К. А. РОДИН

Метафора зеркала и экстенсиональные функции

0. В системе «Principia Mathematica» Уайтхеда и Рассела класс задается через пропозициональную функцию: некоторый определенный класс будет включать элементы (значения переменной x), удовлетворяющие некоторую определенную пропозициональную функцию fx. Пропозициональная функция fx приписывает аргументам некоторое свойство, и, следовательно, в системе «Principia Mathematica» классы определяются через свойство. А если требуется рассмотреть класс, состоящий из двух индивидов a и b (или любого конечного обозримого количества индивидов), такой класс возможно задать через соответствующую функцию $<x=a$ или $x=b>$. Понятие класса играет существенную роль в логицистской программе обоснования математики. Задание класса через свойство предполагает особый взгляд на природу математики: Ф. П. Рамсей указывает, что определение класса через свойство исключает из рассмотрения бесконечные неопределимые классы (разбирая взгляды Рамсея, мы опираемся на работу В. А. Суровцева «Рамсей и программа логицизма»). Но бесконечные неопределимые классы существенны в математике (опять — при определенном понимании природы математики), и, следовательно, необходимо найти способ включить их в рассмотрение, считает Рамсей. Действительно, определение Рассела предполагает невозможным объединение в единый класс бесконечного числа произвольных элементов, но — только элементов, которые «по-настоящему» обладают некоторым свойством. Задание класса через отличительное свойство называется интенсиональным (в отличие от экстенсионального — когда класс задается перечислением элементов, через объем). Аналогично можно сказать о понятии функции: согласно интенсиональному пониманию функции, функция определяется через формулу. Благодаря формуле (в широком понимании — правилу или алгоритму соотнесения) элементы из области (множества) определения функции соотносятся с элементами из области (множества) значений функции. Например, для функции

«x — голубого цвета» множество объектов соотносятся со множеством значений <истина, ложь> благодаря свойству «быть голубого цвета» и возможности верификации (понятие пропозициональной функции опирается на интенсиональное понимание). Современное определение функции (восходит к Дирихле) основано на **произвольном** соотнесении элементов множеств: функция сеть подмножество A × B для области определения A и области значений B — притом для любого x из множества A существует единственный y из множества B (x, y принадлежат подмножеству A × B). Таким образом, функция соотносит элементы одного множества с элементами другого множества произвольно, вне формулы, алгоритма или правила. Вполне поэтому можно согласиться с Витгенштейном, что «теория множеств началась с понятия функции у Дирихле»[*]. Раз Рамсей настаивает на экстенсиональном характере математики, для Рамсея в рамках логицизма должна существовать возможность говорить о бесконечных классах экстенсионально, т. е. через соотнесение объемов (например, теория множеств «основана» на произвольном соотнесении элементов или объемов множеств вне интенсионального определения). Рамсей попытался экстенсионализировать теорию Рассела. В рамках такого проекта Рамсей вводит понятие экстенсиональной функции (далее нас преимущественно будет интересовать определение экстенсиональной функции и критика понятия экстенсиональной функции Витгенштейном)[**].

1. <...> Рамсей приводит и пример такой функции:

Так, ф(Сократ) может быть: Королева Англии умерла.

ф(Платон) — Эйнштейн великий человек.

Экстенсиональная функция произвольно сопоставляет индивидам случайные пропозиции и не является предикативной (не приписывает, не предицирует индивидам никакого свойства).

Для Витгенштейна экстенсиональная пропозициональная функция представляется нонсенсом по двум аргументам. Первое возражение Витгенштейна связано с определением $x=y$ (в системе «Principia Mathematica» — это пропозициональная функция наряду с другими пропозициональными функциями) через экстенсиональные функции. Второе возражение основано на метафоре зеркала.

2. В «Principia Mathematica» определение знака тождества восходит к принципу тождества неразличимых Лейбница: $x=y$. =def: (ф): ф!x. ⊃. ф!y — когда каждая предикативная функция, удовлетворяющая x, удовлетворяет также и y, x и y называются тождественными.

[*] *Wittgenstein L.* Philosophical Remarks. Oxford, 1975. P. 102.

[**] Некоторые сокращения относятся к изложению идей Ф. Рамсея и Л. Витгенштейна, которые — в контексте статьи — напрямую не связаны с Расселом. — *Прим. науч. ред.*

Аргументы Витгенштейна против такого определения можно сформулировать таким образом:

I. Знак тождества не может ничего говорить об отношении объектов. Действительно, сказать о двух объектах «объекты тождественны» бессмысленно, а сказать о самотождестве одного объекта — значит, вообще ничего не сказать. Поэтому очевидно, что равенство не является отношением между объектами: например, предложение «(x): fx. ⊃. $x \neq a$» говорит только, что a удовлетворяет f, а не что только вещи, имеющие определенное отношение к a, удовлетворяют f.

II. Знак тождества в определении из «Principia Mathematica» не приводит к тавтологии (логической необходимости) и поэтому оказывается ненужным в правильной логической нотации. Нет противоречия в представлении о существовании двух действительно различных (нетождественных) объектов при единовременном совпадении элементарных свойств данных объектов. Объекты будут удовлетворять определению тождества и не будут тождественными.

Устранение знака тождества из системы Рассела приводит к ряду серьезных последствий для логицистской программы обоснования математики. Например, мы не можем включить в рассмотрение конечные классы, задаваемые с помощью знака равенства (мы уже исключили из рассмотрения неопределимые бесконечные классы), и остаемся только с классами, определимыми через предикативные функции. Становится невозможным определить класс с двумя или одним элементом (невозможным становится и определение числа). Рамсей, принимая критику Витгенштейна, не может из-за экстенсионалистской установки допустить такие последствия устранения знака тождества. Рамсей поэтому переопределяет тождество через экстенсиональные функции. Действительно, $(ф_e)$. $ф_e x = ф_e y$ означает, что для любой экстенсиональной функции пропозиция, соотнесённая с х, эквивалентна пропозиции, соотнесенной с y. Когда $x=y$, мы получим тавтологию, ведь выражение оказывается произведением значений (тавтологий) вида $p=p$, $q=q$, $r=r$, а если $x \neq y$, тогда некоторая экстенсиональная функция некоторую пропозицию p припишет некоторому x, а пропозицию $\sim p$ — некоторому y, и, значит, получается противоречие $p=\sim p$ (и все логическое произведение обращается в противоречие). Таким образом, Рамсей предлагает заменить определение тождества Рассела из «Principia Mathematica» на структурно подобное определение тождества через экстенсиональные функции <...>

3. Витгенштейн пишет: «Теория тождества Рамсея содержит ошибку, которую совершил бы любой, кто сказал бы, что возможно использовать картинку с тем же успехом, что и зеркало, пусть даже для единственного положения. Когда такое утверждаем, мы игнорируем, что для зеркала существенно как раз именно то, что из него можно вывести положение тела перед ним, тогда как в случае с картинкой необходимо знать [заранее], что положения, продублированные перед вами, могут объяснить картинку как зеркальный образ»*. В рамках теории тождества Рамсея экстенсиональные функции, как и определение знака тождества, основываются на произвольном (внешнем) соотнесении элементов. Определение:

> $x=y =_{\text{def}}$ (ф$_e$). ф$_e x$ ф$_e y$ (Витгенштейн для удобства обозначает (ф$_e$). ф$_e x$ $^{\Xi\,\Xi}$ Ф$_e y$ через Q (x, y))

как бы рисует нам одну картинку при $x=y$ (в нотации Витгенштейна будет $x=x$) и другую при $x \neq y$ (в нотации Витгенштейна: $x=y$). По такой картинке мы не можем сказать ничего о том, имеет ли место равенство или неравенство (в действительности) или же нет <...>

4. На примере полемики вокруг экстенсиональных пропозициональных функций хорошо просматривается отношение Витгенштейна к программе логицизма (в исходном варианте Рассела и в изводе Рамсея). Безусловно не приемлемым было для Витгенштейна произвольное экстенсиональное задание множества через объем (Витгенштейн отчетливо сознавал, что понятие функции Дирихле было важным в истории появления теории множеств). И теория классов (для удобства не будем различать между классом и множеством) в «Principia Mathematica» представлялась Витгенштейну излишней: «теория классов в математике совершенно ненужная»**. Математическая общность (для Витгенштейна) не случайная и не произвольная общность. Витгенштейн путем элиминации знака тождества из правильной логической нотации отвергает понятие эквивалентности, на котором строится определение числа у Фреге и Рассела (по Витгенштейну, любое соответствие должно быть материальным и обозримым (например, чашки и чайные ложки), либо должно основываться на некотором правиле), вообще отвергает теорию классов и теорию множеств и, соответственно, отвергает проект Рамсея по эксгенсионализации математики (ведь математика, по Рамсею, должна иметь дело не с предикативными функциями или внутренними отношениями, но с возможными и произвольными отношениями по объему).

---

* *Wittgenstein L.* Philosophical Grammar. Berkeley, Los Angeles, 2005. P. 315.

** *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М., 2008. § 6.031.